Une partition de l'ensemble des martingales continues, liée à leurs valeur absolue et processus croissant.

J. Azéma et M. Yor.

Laboratoire de Probabilités, Tour 56, 3ᵉ étage, Université P. et M. Curie ; 4, Place Jussieu, 75252 Paris Cédex 05.

L'origine de ce travail est la suivante : si $(B_t, t \geq 0)$ est un mouvement brownien réel issu de 0, alors la filtration naturelle de $|B|$, c'est à dire : $(\sigma\{|B_s|, s \leq t\}, t \geq 0)$, ~~contenue~~ est strictement contenue dans celle de B : en effet, d'après la symétrie en loi du mouvement brownien, pour tout t, $\mathrm{sgn}(B_t)$ est indépendant de $\sigma\{|B_s|, s \geq 0\}$.

Il est alors tentant de penser que, pour toute martingale $(M_t, t \geq 0)$ continue, nulle en 0, et non identiquement nulle, la même inclusion stricte est encore vraie, c'est à dire :

$$(1) \qquad \sigma\{|M_s|, s \leq t\} \subsetneq \sigma\{M_s ; s \leq t\}$$

Nous allons montrer ci-dessous que (1) n'est pas réalisée de façon générale ; par exemple, si $M_t = B_t^2 - t$, les deux filtrations ci-dessus sont identiques.

De façon générale, nous avons été amenés à distinguer quatre familles de martingales continues (toujours supposées nulles en 0, et non identiquement nulles) selon qu'elles satisfont l'une des propriétés suivantes :

$$(\mathrm{I}) \quad \sigma\{\langle M\rangle_s ; s \leq t\} \subsetneq \sigma\{|M_s|, s \leq t\} \subsetneq \sigma\{M_s, s \leq t\}$$

$$(\mathrm{II}) \quad \sigma\{\langle M\rangle_s, s \leq t\} = \sigma\{|M_s|, s \leq t\} = \sigma\{M_s, s \leq t\}$$

$$(\mathrm{III}) \quad \sigma\{\langle M\rangle_s, s \leq t\} = \sigma\{|M_s|, s \leq t\} \subsetneq \sigma\{M_s, s \leq t\}$$

(IV) $\sigma\{\langle M\rangle_s ,\ s\leq t\} \subsetneq \sigma\{|M_s| ,\ s\leq t\} = \sigma\{M_s ,\ s\leq t\}$

(Il faut faire tenir les 4 lignes sur la 1ère page, si possible).

Rappelons que, de façon générale, la double inclusion au sens large :

(2) $\sigma\{\langle M\rangle_s ,\ s\leq t\} \subseteq \sigma\{|M_s| ,\ s\leq t\} \subseteq \sigma\{M_s ,\ s\leq t\}$

est satisfaite par toute martingale locale continue.

Si une martingale continue satisfait la propriété (N), nous dirons qu'elle est de genre (N) ; dans un travail précédent [ ], nous avions introduit les martingales de type 1 et de type 2, qui interviennent dans la représentation de l'ensemble des martingales qui s'annulent sur l'ensemble des zéros du mouvement brownien réel ; les notions de type et de genre n'ont rien à voir l'une avec l'autre.

Chacun des quatre premiers paragraphes ci-dessous est consacré à donner des exemples de martingales de genre (N), N variant de I à IV.

1. Quelques martingales de genre (I)

On suppose donné ici un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$.

Proposition 1 : Soit $(B_t, t \geq 0)$ un $(\mathcal{F}_t)$ mouvement brownien réel issu de 0, et $\varphi : \Omega \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ un processus $(\mathcal{F}_t)$ prévisible, indépendant de B, tel que :

pour $t < \infty$, $\int_0^t ds\, \varphi^2(s,\omega) < \infty$ et $\int_0^\infty ds\, \varphi^2(s,\omega) = \infty$, P p.s.

Alors : (i) la martingale locale

$$\left(M_t = \int_0^t \varphi(s,\omega)\, dB_s \,, \; t \geq 0 \right)$$ peut s'écrire sous la forme :

(3) $$M_t = \gamma_{\langle M \rangle_t} \qquad (t \geq 0)$$

avec γ mouvement brownien réel indépendant de $\sigma\{\varphi_s, s \geq 0\} \supseteq \sigma\{\langle M \rangle_s, s \geq 0\}$.

[Bien entendu, γ n'est autre que le mouvement brownien de Dubins-Schwarz associé à M].

(ii) M est une martingale de genre (I).

Démonstration : (i)

(ii) Montrons maintenant que la filtration $\sigma\{\langle M \rangle_s, s \leq t\}$ est strictement contenue dans celle de $\sigma\{|M_s|, s \leq t\}$; en effet, s'il n'en était pas ainsi, la variable $|\gamma_u| \equiv |M_{\tau_u}|$, où $\tau_u \equiv \inf\{t : \langle M \rangle_t > u\}$, serait mesurable par rapport à $\sigma\{\langle M \rangle_t, t \geq 0\}$; or, γ est indépendant de $\sigma\{\langle M \rangle_t, t \geq 0\}$.

Toujours à l'aide de la représentation (3), remarquons maintenant que M est une martingale symétrique (ie: $M \overset{(loi)}{=} -M$) et que, pour tout t, on a : $P(M_t = 0) = 0$. En conséquence, $\mathrm{sgn}(M_t)$ est une variable de Bernoulli symétrique, indépendante de $\sigma\{|M_s|, s \geq 0\}$ □

2. Quelques martingales de genre (II).

Compte-tenu de la double inclusion (2) qui est valable de façon entièrement générale, nous remarquons que, pour qu'une martingale locale $(M_t, t \geq 0)$ soit de genre (II), il est nécessaire et suffisant qu'elle satisfasse :

(4) $$\sigma\{\langle M\rangle_s, s \leq t\} = \sigma\{M_s, s \leq t\}, \text{ pour tout } t.$$

En nous appuyant sur cette remarque, nous montrons la

Proposition 2 : Soit $(B_t, t \geq 0)$ mouvement brownien réel issu de 0.

Alors : (i) pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, la martingale :

$$M_t^{(n)} = \int_0^t B_s^{2n-1} dB_s \quad (t \geq 0) \text{ est de genre (II).}$$

(ii) pour tout $\alpha \neq 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\left\{\exp\left(\alpha B_t - \frac{\alpha^2 t}{2}\right) - 1, t \geq 0\right\}$ est de genre (II).

Démonstration : (i) Il suffit de remarquer que, d'une part, on a :

$$\langle M^{(n)}\rangle_t = \int_0^t B_s^{2(2n-1)} ds \quad , \text{ et donc la filtration}$$

$\sigma\{\langle M^{(n)}\rangle_s, s \leq t\}$ est identique à la filtration de $|B|$;

d'autre part, puisque l'on a, à l'aide de la formule d'Itô :

$$B_t^{2n} = 2n\, M_t^{(n)} + n(2n-1)\int_0^t ds\, B_s^{2n-2} ,$$

la filtration $\sigma\{M_s^{(n)}, s \leq t\}$ est contenue dans celle de $|B|$.

Finalement on a donc :

$$\sigma\{\langle M^{(n)}\rangle_s, s\leq t\} = \sigma\{M_s^{(n)}, s\leq t\} = \sigma\{|B_s|, s\leq t\}$$

(ii) On voit ici immédiatement, en utilisant l'identité :

$$\exp\left(\alpha B_t - \frac{\alpha^2 t}{2}\right) - 1 = \alpha\int_0^t \exp\left(\alpha B_s - \frac{\alpha^2 s}{2}\right) dB_s$$

que la martingale en question est de genre (II) □

<u>Remarque 1</u> : Il semble vraisemblable que, en s'appuyant sur un travail récent de Goswami-Rao [ ], on puisse montrer que les martingales $(H_{2n}(B_t, t), t\geq 0)$ sont de genre (II), où H_{2n} désigne le polynome de Hermite de degré $(2n)$.

<u>Remarque 2</u> : Les martingales qui sont présentées dans la Proposition 2 sont toutes des martingales pures (voir Stroock-Yor [ ]). Cependant, il existe des martingales de genre (II) qui n'ont même pas la propriété de représentation prévisible ; en fait, ~~certaines~~ on peut construire des martingales de genre (II) qui ont une multiplicité, au sens de Davis-Varaiya [ ] aussi grande que l'on veut. Par exemple, la martingale suivante :

$$M_t = \sum_{i=1}^n \lambda_i \left((B_t^i)^2 - t\right),$$

où les $(\lambda_i ; 1\leq i\leq n)$ sont n réels strictement positifs distincts, et les processus $B^{(i)}$ sont n mouvements browniens réels indépendants, est une martingale de genre (II) ~~est~~ et sa filtration naturelle est égale à celle de $(|B^i| ; 1\leq i\leq n)$, et ~~est~~ est donc de multiplicité n.

3. Quelques martingales de genre (III).

Nous allons construire des martingales pures de genre (III); posons $M_t = \gamma_{\langle M\rangle_t}$, $t \geq 0$, où γ désigne un mouvement brownien réel issu de 0, et $\langle M\rangle_t \equiv \inf\left\{u : \int_0^u ds\, f(|\gamma_s|) > t\right\}$,

avec : $f(x) = k + \dfrac{x}{1+x}$, où $k \geq 1$.

Tout d'abord, d'après la définition même de $\langle M\rangle$, on a :

$$\langle M\rangle_u = \int_0^u \frac{ds}{f(|M_s|)} ,$$

d'où l'on déduit immédiatement que : $\sigma\{\langle M\rangle_u, u \leq t\} = \sigma\{|M_u|, u \leq t\}$.
D'autre part, pour montrer que M est de genre (III), il nous reste à prouver que :

$$\sigma\{|M_t|, t \geq 0\} \subsetneq \sigma\{M_t, t \geq 0\} .$$

Or, on a, par construction : $\sigma\{|M_t|, t \geq 0\} = \sigma\{|\gamma_u|, u \geq 0\}$,

alors que : $\sigma\{M_t, t \geq 0\} = \sigma\{\gamma_u, u \geq 0\}$,

d'où l'inclusion stricte (1). M est bien de genre (III).

<u>Remarque 3</u>: Pour toute martingale locale continue M, on a :

$$\sigma\{|M_s|, s \leq t\} = \sigma\left\{\tilde{M}_s \equiv \int_0^s \operatorname{sgn}(M_u)\, dM_u ,\ s \leq t\right\},$$

et on voit alors que, pour que M soit de genre (III), il faut et il suffit que $\tilde{M}$ soit de genre (II), et qu'il existe au moins un $t > 0$ tel que $\operatorname{sgn}(M_t)$ ne soit pas mesurable par rapport à $\sigma\{|M_s|, s \geq 0\}$. □

4. Quelques martingales de genre (IV).

De façon à assurer d'une part que :

$$\sigma\{|M_s|, s\leq t\} = \sigma\{M_s, s\leq t\},$$

nous allons "forcer" les signes de M à être adaptés à $\sigma\{\langle M\rangle_s, s\leq t\}$, et donc à $\sigma\{|M_s|, s\leq t\}$ et, d'autre part, pour que la filtration $(\sigma\{\langle M\rangle_s, s\leq t\}, t\geq 0)$ soit strictement contenue dans $(\sigma\{|M_s|, s\leq t\}, t\geq 0)$, nous allons faire en sorte que seuls les signes de M soient adaptés à $(\sigma\{\langle M\rangle_s, s\leq t\}, t\geq 0)$.

Voici maintenant la construction précise d'une telle martingale $(M_t, t\geq 0)$ qui est en fait une martingale pure, définie comme suit :

posons $M_t = \gamma_{\langle M\rangle_t}$, avec $(\gamma_u, u\geq 0)$ mouvement brownien réel, issu de 0, et $\langle M\rangle_t \equiv \inf\left\{u : \int_0^u ds\,(2+\operatorname{sgn}(\gamma_s)) > t\right\}$

Il découle immédiatement de cette définition de $\langle M\rangle$ que l'on a, en posant :

$$h(x) = 2+\operatorname{sgn}(x) \quad : \quad \langle M\rangle_t = \int_0^t \frac{ds}{h(M_s)},$$

et donc : $\sigma\{\langle M\rangle_s, s\leq t\} = \sigma\{\operatorname{sgn}(M_s), s\leq t\}$, ce qui implique :

$$\sigma\{|M_s|, s\leq t\} = \sigma\{M_s, s\leq t\}.$$

Il ne reste plus qu'à montrer que la filtration $(\sigma\{\langle M\rangle_s, s\leq t\}, t\geq 0)$ est strictement contenue dans $(\sigma\{|M_s|, s\leq t\}, t\geq 0)$

S'il n'en était pas ainsi, on aurait, en particulier :

$$\sigma\{\langle M\rangle_s, s\geq 0\} = \sigma\{|M_s|, s\geq 0\}$$

Or, nous savons que, d'une part : $\sigma\{\langle M\rangle_s, s\geq 0\} = \sigma\{\operatorname{sgn}(\gamma_u), u\geq 0\}$,

et, d'autre part : $\sigma\{|M_s|, s\geq 0\} = \sigma\{M_s, s\geq 0\} = \sigma\{\gamma_u, u\geq 0\}$.

Or, on a évidemment l'inclusion stricte :

$$\sigma\{\operatorname{sgn}(\gamma_u),\, u \geq 0\} \subsetneq \sigma\{\gamma_u,\, u \geq 0\},$$

ce qui prouve que M est de genre (IV).