Une présentation des théorèmes de Pitman pour les processus de Bessel de dimension $n \neq 2$.

11 Juillet 1996.

Il s'agit, à la suite de ma note du 9 Juillet, d'expliciter la formule de décomposition pour $n<2$, et de montrer qu'il y a une formule "unifiée" pour tout n.

A l'aide uniquement de la formule d'Itô, et de la formule (4) (: du 9 Juillet), on obtient : pour $n<2$,

$$(7) \qquad R_{t\wedge T_0} = r + \beta_t + 2\int_0^t (d\sigma_s) - \frac{n-3}{2}\int_0^{t\wedge T_0} \frac{ds}{R_s}$$

En conséquence, on peut donc écrire, pour tout $n \neq 2$:

$$(8) \qquad R'_t = r + \beta_t + 2A_t - \left(\frac{n-3}{2}\right)\int_0^t \frac{ds}{R'_s},$$

où : $R'_t = \begin{cases} R_{t\wedge T_0}, & \text{si } n<2 \\ R_t, & \text{si } n>2 \end{cases}$; $A_t = \begin{cases} \int_0^t d\sigma_u \equiv \sigma_t - \sigma_0, & n<2 \\ J_t, & n>2. \end{cases}$

D'autre part, en écrivant (8) ~~___~~ et en comparant avec la décomposition d'origine de (R'_t) (dans la filtration initiale)* :

$$(9) \qquad R'_t = r + \gamma_t + \frac{n-1}{2}\int_0^t \frac{ds}{R'_s},$$

on obtient que la projection duale prévisible de (A_t) [sur la filtration d'origine] est : $\frac{n-2}{2}\int_0^t \frac{ds}{R'_s}$: ceci est bien satisfaisant,

car pour $n>2$, (A_t) est croissant, et pour $n<2$, (A_t) est décroissant.

Une autre façon, équivalente, de présenter ce résultat, est de dire :

la projection duale prévisible de $A_t^{2/}$ est $((n-2)t, t \geq 0)$

(en toute rigueur, pour $n<2$, on devrait écrire : $(t \wedge T_0)$.

Je prends $n>2$, pour y voir clair maintenant ;
à la fin de mon texte (: Chap. 12 de Zürich), j'ai remarqué
que :

$$\left\{ 2J_t^{2/} - R_t^{2/} - (n-4)t \,,\ t \geq 0 \right\} \text{ est une } (\tilde{\mathcal{R}}_t) \text{ martingale.}$$

Ce qui entraîne à l'évidence que la projection duale prévisible de $J_t^{2/}$ est bien $(n-2)t$ (puisque : $(R_t^2 - nt, t \geq 0)$ est une $(\mathcal{R}_t)$ martingale).

Une question qui me semble intéressante (et liée aux questions ci-dessus) :
exprimer la décomposition de $(R_t, t \geq 0)$ lorsque l'on suppose $R_0 = r > 0$,
dans la filtration grossie / avec la variable J_0.
initialement
